

**I муниципальный Форум педагогических идей
«Эффективные практики повышения качества образования»**

***Сборник задач
с экономическим содержанием
для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ***

Разработали:
Учителя математики МБОУ СОШ №8:
Барабанова Надежда Владимировна
Лисова Татьяна Анатольевна
Силаева Эльвира Александровна
Федосеева Ольга Николаевна
Барбашова Наталья Николаевна

о.Муром

Оглавление

1.	Введение	3
2.	Задачи с экономическим содержанием	4
2.1.	Простейшие задачи на процент	4
2.2.	Задачи на товарно-денежные отношения	5
2.3.	Чтение и анализ данных, представленных в виде графиков, диаграмм и таблиц	7
2.4.	Формула простых процентов	17
2.5.	Формула сложных процентов	18
2.6.	Обобщенная формула сложных процентов	20
2.7.	Экономическая задача с дифференцированной схемой выплат	21
2.8.	Определение процента банка	22
2.9.	Кредиты. Разные задачи.	25
2.10.	Задачи на оптимизацию.	29
3.	Сюжетные задачи	31
4.	Практические советы	32
5.	Заключение	34
6.	Литература	35

Аннотация

Данная разработка посвящена задачам на проценты, сложные проценты и задачам с экономическим содержанием, содержащихся в КИМах на ЕГЭ, и которые вызывают большие затруднения как у учеников, так и у учителей. Разработка рассчитана на 5-10 занятий в зависимости от подготовленности аудитории. Изложение начинается с самых простых задач на проценты и подводит последовательно к решению наиболее сложных задач, предлагаемых на ЕГЭ.

Работа будет полезна как для девятиклассников, для повторения многих задач на проценты, так и для 11-классников, собирающихся сдать математику с высокими результатами. Также, работа представляет интерес для педагогов, готовящих выпускников к экзаменам. Весь материал по теме систематизирован, сложность задач идет по нарастанию, разбирается большое количество задач и приведены задачи для самостоятельного решения. Все задачи содержат ответы.

1. Введение

«Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека, как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды». (П.Л. Чебышев)

Воспитание делового человека, является одной из важных задач современной школы. Причем не просто делового, а компетентного в сфере социально-трудовой деятельности, а также в бытовой сфере. Поэтому сегодня выпускник должен иметь развитое экономическое мышление и быть готов к жизни в условиях рыночных отношений. Экономические знания стали необходимыми как в профессиональной сфере, так и в повседневной жизни. Элементарные экономические знания позволяют понять роль и права человека в обществе, готовят учеников к адекватному восприятию общества и производства, помогают им определить для себя сферу деятельности, профессию в будущем. Согласно статистике, почти каждая семья берет кредит на приобретение того или иного товара!

В сегодняшние дни потребительские кредиты, кредитные карты, автокредиты, ипотека, вклады, банковские карты и другие финансовые услуги очень распространены и играют важную роль в экономике страны и каждой семьи.. Семья находится в постоянных связях с государственными учреждениями, предприятиями и фирмами. Она является важнейшим поставщиком рабочей силы для предприятий и фирм, которые в свою очередь выплачивают им заработную плату, различные социальные пособия, пенсию. Домашние хозяйства являются основными потребителями товаров и услуг, поставляемых предприятиями и частными лицами. Эффективному постижению азов экономики поможет решение задач, в содержании которых идет речь о процентах. Понятие «проценты» буквально вошло в нашу жизнь, оно атакует нас в пору утверждения рыночных отношений в экономике, в пору банкротств, инфляций, финансовых кризисов. Сами проценты не дают экономического развития, но их знание помогает в развитии практических способностей, а также умение решать экономические задачи. Обдуманное изучение процентов может способствовать развитию таких навыков как экономичность, расчетливость.

Многие школьники не в состоянии воспринимать и понимать речевые обороты взрослых, испытывают затруднения при решении задач экономического характера, а также определить для себя сферу деятельности, профессию в будущем. Если задача на расчёт платежа по кредиту является злободневной и достаточно интересной, возможно, заинтересовавшиеся ученики самостоятельно или под руководством учителя, изучив предлагаемую работу, разбирая решения примеров задач, освоят предложенные методы решения задач с экономическим содержанием.

Предлагаемый материал демонстрирует учащимся применение математического аппарата к решению повседневных бытовых проблем каждого человека, вопросов рыночной экономики и задач технологии производства; ори-

ентирует учащихся на обучение по естественно - научному и социально- экономическому профилю. Познавательный материал будет способствовать не только выработке умений и закреплению навыков вычислений сложных процентов, но и формированию устойчивого интереса учащихся к процессу и содержанию деятельности, а также познавательной и социальной активности.

Какие цели мы преследуем:

1. Обобщить методы решения задач с экономическим содержанием как базового, так и повышенного уровня сложности;
2. Сформировать у учащихся навыки перевода реальных предметных ситуаций в различные математические модели;
3. Показать учащимся необходимость изучения процентов для применения их в реальных практических ситуациях.
4. Облегчить работу учителя по подбору задач экономического содержания.

Термин «задача с экономическим содержанием» предполагает присутствие в формулировке экономических терминов, а ее решение требует составления математической модели экономического процесса. При этом большинство таких задач можно отнести к профессионально ориентированным, поскольку в процессе их решения учащиеся оперируют экономическими понятиями, необходимыми в будущей профессиональной деятельности.

2. Задачи с экономическим содержанием.

2.1. Простейшие задачи на проценты.

Для того, что бы решать задачи с экономическим содержанием, необходимо понимать, что такое процент, уметь производить процентные расчеты.

Процент – сотая доля целого (принимаемого за единицу); обозначается знаком «%». Поэтому процентом (от) какого-либо числа называется сотая часть этого числа.

При решении задач на проценты необходимо помнить:

- 1) Как выразить число в процентах?

Чтобы выразить число в процентах достаточно умножить его на 100 и поставить знак %.

Пример: $4 = 4 \cdot 100\% = 400\%$; $0,75 = 0,75 \cdot 100\% = 75\%$.

- 2) Как выразить проценты в виде десятичной дроби?

Чтобы выразить проценты в виде десятичной дроби достаточно число процентов разделить на 100.

Пример: $300\% = 300:100 = 3$; $36,7\% = 36,7:100 = 0,367$;
 $9\% = 9:100 = 0,09$.

Пусть число а составляет k % от числа b (k называется процентным отношением числа а к числу b).

Чтобы найти проценты от числа, надо число процентов выразить десятичной дробью, а затем умножить данное число на эту дробь.

Чтобы найти число по данным его процентам, надо выразить проценты в виде дроби и разделить данное число на эту дробь.

2.2. Задачи на товарно-денежные отношения.

1. Килограмм слив стоит 60 руб. Мама купила 3 кг 200 г слив. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 руб.?

Решение: $3,2 \cdot 60 = 192$ руб. за 3,2 кг $1000 - 192 = 808$ руб. сдача

Ответ: 808 рублей.

2. В детском лагере на каждого ребенка полагается 60 г сахара в день. В лагере 215 детей. Какого наименьшего количества килограммовых пачек сахара достаточно на неделю?

Решение: $60 \cdot 215 \cdot 7 = 90300$ г = 90,3 кг - 91 пачка

Ответ: 91

3. Булочка стоит 14 руб. Какое наибольшее количество булочек можно купить на 100 руб.?

Решение: $100 : 14 = 7,14$ – 7 булок

Ответ: 7

4. В летнем лагере 236 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 46 пассажиров. Сколько автобусов потребуется арендовать, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

Решение: $236 + 28 = 264$ пассажира $264 : 46 = 5,7$ - 6 автобусов

Ответ: 6

5. Магазин открывается в 10 часов утра, а закрывается в 10 часов вечера. Обеденный перерыв длится с 15 до 16 часов. Сколько часов в день открыт магазин.

Решение: $22 - 10 - 1 = 11$ часов

Ответ: 11

6. В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 103 м³ воды, а 1 октября 114 м³. Какую сумму нужно заплатить за холодную воду за сентябрь, если цена 1 м³ холодной воды составляет 19 руб. 20 коп.? Ответ дайте в рублях.

Решение: $(114 - 103) \cdot 19,2 = 211,2$ руб.

Ответ: 211,2

7. Для лакировки пола размером 10 м на 10 м понадобилось ровно 2 банки лака. Какое наименьшее число банок лака нужно купить для лакировки пола размером 15 м на 30 м?

Решение: $10 \cdot 10 = 100$ м² $15 \cdot 30 = 450$ м² $450 : 100 = 4,5$ банки

Ответ: 5

8. Трое решают, как им дешевле доехать из одного города в другой на поезде или в автомобиле, и планируют разделить расходы на поездку поровну. Билет на поезд стоит 760 руб. на одного человека. Автомобиль расходует 12 л бензина на 100 км пути, 6 расстояние по шоссе равно 600 км, цена бензина равна 31,5 руб. за литр. Во сколько рублей на одного обойдется наиболее дешевая поездка?

Решение: $760 \cdot 3 = 2280$ руб на поезде $12 \cdot 6 \cdot 31,5 = 2268$ руб. на автомобиле
 $2268 : 3 = 756$ руб. Ответ: 756

9. Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Сколько пачек обоев нужно купить, если одна пачка обоев рассчитана на 8 рулонов? (Ответ: 6)

10. В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за 2 шоколадки, покупатель получает 3 шоколадки (одна шоколадка в подарок). Шоколадка стоит 35 руб. Какое наибольшее число шоколадок можно получить на 200 руб.? (Ответ: 7)

11. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 8 кг яблок? (Ответ: 10)

12. В пачке бумаги 500 листов. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель? (Ответ: 20)

13. Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 0,5 г три раза в день в течение 14 дней. Упаковка содержит 8 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок требуется на весь курс лечения? (Ответ: 6)

14. Подготовка брошюры к печати стоит 45 тыс. руб. Печать одного экземпляра стоит 40 руб. Транспортные расходы составляют 15 тыс. руб. Сеть книжных магазинов покупает эту брошюру у издательства по 70 руб. за экземпляр. При каком наименьшем тираже брошюры издательство окажется не в убытке? (Ответ: 2000)

15. Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 22 м, 8 м и 1,5 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 500 руб. за 1 м². Сколько будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки? (Ответ: 161000)

16. Валя купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 44 поездки. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 760 руб., а разовая поездка 22 руб.? (Ответ: 208)

17. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 руб. и попросил залить бензин до полного бака. Цена 1 литра бензина 32 руб. 10 коп. Сдачи клиент получил 4 руб. 90 коп. Сколько литров бензина было залито в бак? (Ответ: 31)

18. Выпускники купили 15 букетов цветов для праздника последнего звонка: из 3 роз каждому учителю и из 7 роз классному руководителю и директору. Стоимость одной розы 35 руб. Сколько рублей заплатили за все розы? (Ответ: 1855)

19. 143 кг крупы требуется пересыпать в коробки вместимостью 3 кг, 5 кг и 9 кг так, чтобы в коробках не оставалось пустого места. Какое наименьшее число коробок потребуется купить для этого? (Ответ: 17)

20. На свой день рождения Маша купила 35 конфет и 49 шоколадных медалей. Какое наибольшее количество гостей Маша может пригласить к се-

бе, чтобы и конфеты, и медали можно было разделить поровну между всеми, включая ее саму? (Ответ: 6)

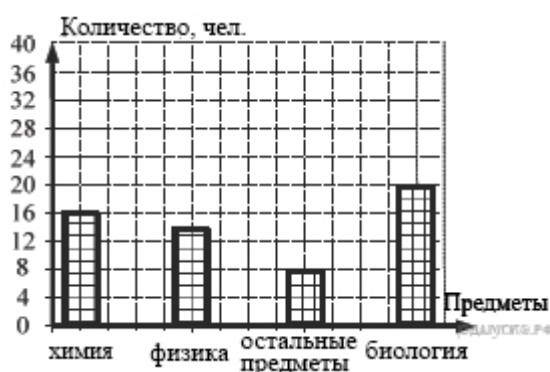
21. Витя и Катя приобрели инвестиционный портфель, вложив деньги в отношении 3 : 8 соответственно и договорившись поделить прибыль пропорционально вложенным деньгам. Прибыль составила 330 тыс. руб. Сколько рублей причитается Вите? (Ответ: 90000)

22. Игорь, Володя, Сережа и Паша купили лотерейный билет за 10 руб. Игорь заплатил 2 руб. 90 коп., Володя 3 руб. 70 коп., Сережа 1 руб. 20 коп., а оставшуюся сумму внес Паша. Они договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесенным средствам. На билет выпал выигрыш 2000 руб. Какая сумма из выигрыша причитается Паше? Ответ дайте в рублях (Ответ: 440)

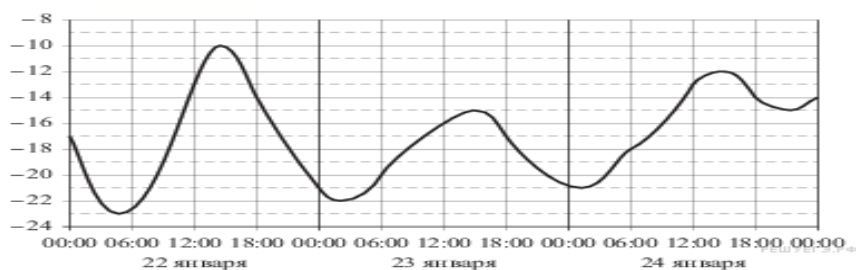
23. Для строительства можно использовать один из трёх вариантов фундамента: каменный, бетонный и фундамент из пеноблоков. Для каменного фундамента необходимо 7 т камня и 7 мешков цемента. Для фундамента из пеноблоков необходимо 6 м³ пеноблоков. Для бетонного фундамента необходимо 9 т щебня и 25 мешков цемента. 1 т камня стоит 2000 руб., 1 м³ пеноблоков стоит 2300 руб., щебень стоит 750 руб. за 1 т, а мешок цемента стоит 260 руб. Сколько рублей придется заплатить за самый дешевый фундамент? (Ответ: 13250).

2.3. Чтение и анализ данных, представленных в виде графиков, диаграмм и таблиц.

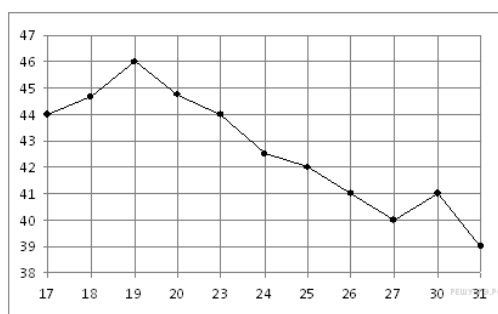
1. Завуч школы подвел итоги по выбору предметов для сдачи ЕГЭ учащимися 11-х классов. Результаты представлены на диаграмме. Сколько примерно учащихся выбрали для сдачи ЕГЭ физику?



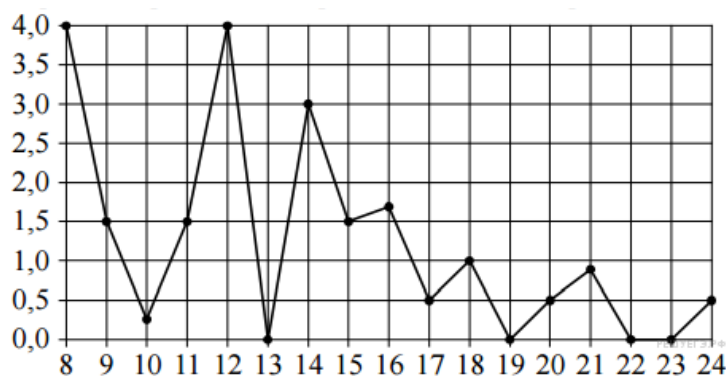
2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 22 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



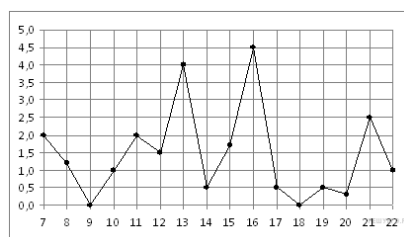
3. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



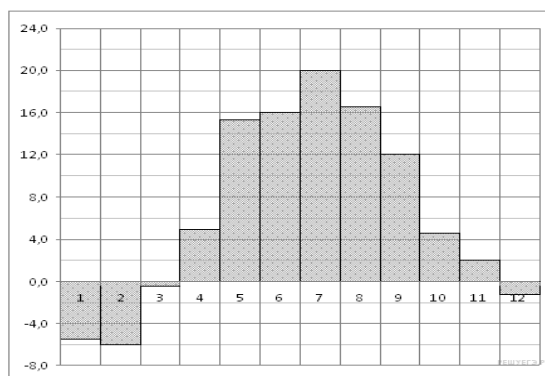
4. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпадало в период с 13 по 20 января. Ответ дайте в миллиметрах.



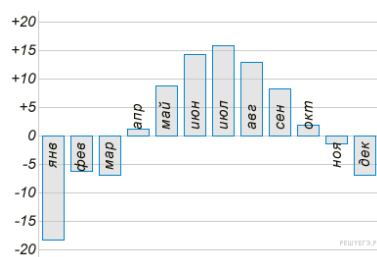
5. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало менее 3 миллиметров осадков.



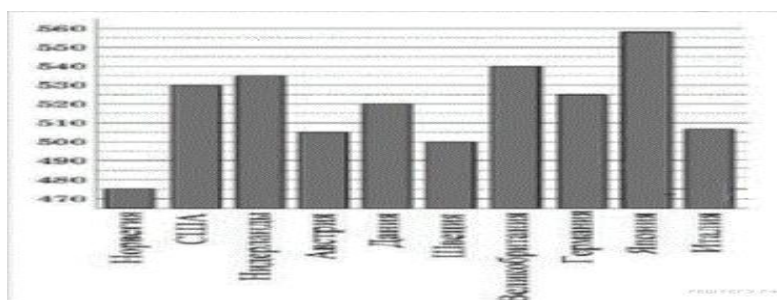
6. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 2003 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



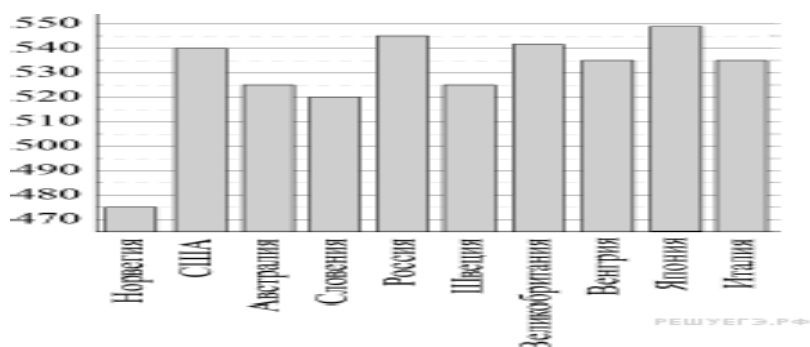
7. На диаграмме показана средняя температура воздуха (в градусах Цельсия) в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура была выше нуля.



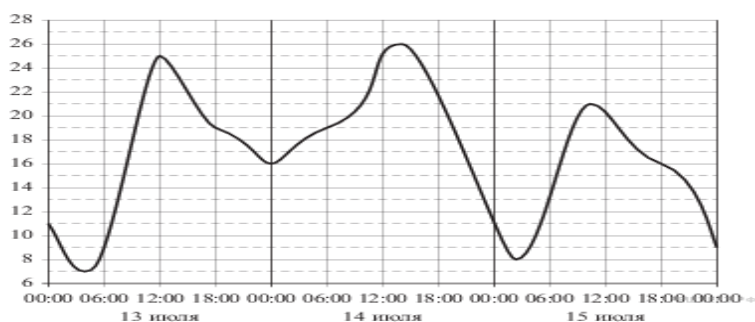
8. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Найдите число стран, в которых средний балл ниже, чем 515.



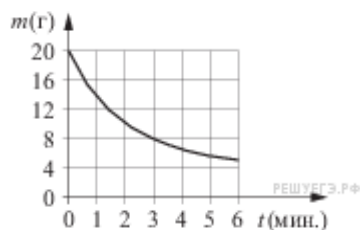
9. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса, по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл участников выше, чем в Венгрии.



10. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



11. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое еще не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который еще не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за три минуты?



12. В таблице представлены цены (в рублях) на некоторые товары в трёх магазинах:

Магазин	Орехи (за кг.)	Шоколад (за плитку)	Зефир (за кг.)
«Машенька»	600	45	144
«Лидия»	585	65	116
«Камея»	660	53	225

Лариса Кузьминична хочет купить 0,4 кг орехов, 5 плиток шоколада и 1,5 кг зефира. В каком магазине стоимость такой покупки будет наименьшей, если в «Камее» проходит акция: скидка 20% на орехи и зефир, а в «Машеньке» скидка 10% на все продукты?

13. Бизнесмен Петров выезжает из Москвы в Санкт-Петербург на деловую встречу, которая назначена на 9:30. В таблице дано расписание ночных поездов Москва — Санкт-Петербург.

Номер поезда	Отправление из Москвы	Прибытие в Санкт-Петербург
038А	00:43	08:45
020У	00:53	09:02
016А	01:00	08:38
116С	01:00	09:06

Путь от вокзала до места встречи занимает полчаса. Укажите номер самого позднего (по времени отправления) из московских поездов, которые подходят бизнесмену Петрову.

14. Для квартиры площадью 75 кв. м заказан натяжной потолок белого цвета. Стоимость работ по установке натяжных потолков приведена в таблице.

Цвет потолка	Цена в рублях за 1 м ² (в зависимости от площади помещения)			
	до 10 м ²	от 11 до 30 м ²	от 31 до 60 м ²	свыше 60 м ²
белый	1200	1000	800	600
цветной	1350	1150	950	750

Какова стоимость заказа, если действует сезонная скидка в 5%?

15. В таблице даны результаты олимпиад по математике и обществознанию в 8 «А» классе.

Номер ученика	Балл по математике	Балл по обществознанию
5005	76	38
5006	58	54
5011	93	97
5015	96	60
5018	63	90
5020	73	78
5025	73	35
5027	90	53
5029	59	63
5032	85	37
5041	52	43
5042	36	55
5043	91	71
5048	85	33
5054	32	81

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 150 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 80 баллов. Сколько человек из 8 «А», набравших меньше 80 баллов по математике, получают похвальные грамоты?

16. В таблице представлены нормативы по технике чтения в 3 классе.

Отметка	Количество прочитанных слов минуту	
	Первое полугодие учебного года	Второе полугодие учебного года
«2»	59 и менее	69 и менее
«3»	60–69	70–79
«4»	70–79	80–89
«5»	89 и более	99 и более

Какую отметку получит третьеклассник, прочитавший в апреле 68 слов за минуту?

17. В таблице приведены размеры штрафов за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации, установленных на территории России на 1 января 2013 года.

Превышение скорости, км/ч	11 – 20	21 – 40	41 – 60	61 и более
Размер штрафа, руб.	100	300	1000	2500

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 175 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 110 км/ч?

18. В таблице приведены нормативы по прыжкам с места для учеников 11 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Расстояние, см	230	220	200	185	170	155

Какую оценку получит девочка, прыгнувшая на 167 см?

19. В таблице приведена стоимость работ по покраске потолков.

Цвет потолка	Цена в рублях за 1 м ² (в зависимости от площади помещения)			
	до 10 м ²	от 11 до 30 м ²	от 31 до 60 м ²	свыше 60 м ²
белый	105	85	70	60
цветной	120	100	95	85

Пользуясь данными, представленными в таблице, определите, какова будет стоимость работ, если площадь потолка 50 м², цвет потолка белый и действует сезонная скидка в 10%. Ответ укажите в рублях.

20. В таблице приведены расстояния от Солнца до четырёх планет Солнечной системы. Какая из этих планет дальше всех от Солнца?

Планета	Марс	Меркурий	Нептун	Сатурн
Расстояние (в км)	$2,280 \cdot 10^8$	$5,790 \cdot 10^7$	$4,497 \cdot 10^9$	$1,427 \cdot 10^9$

В ответе укажите номер правильного варианта.

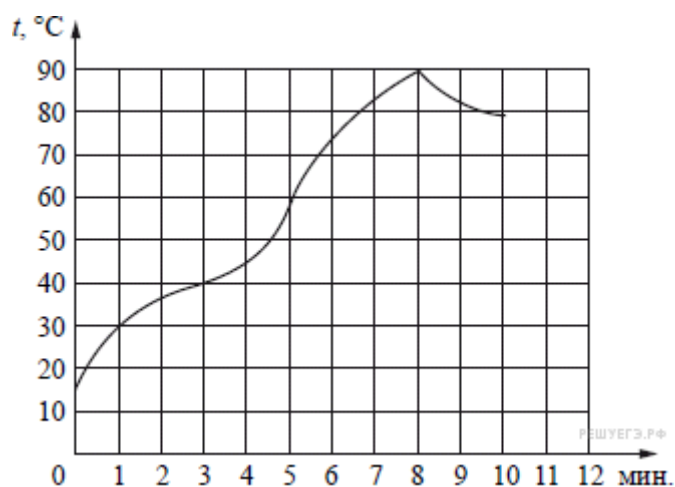
- 1) Марс
- 2) Меркурий
- 3) Нептун
- 4) Сатурн

22. В таблице представлены цены (в рублях) на некоторые товары в трёх магазинах.

Магазин	Хлеб (за батон)	Колбаса (за кг)	Ветчина (за кг)
«Покупай-ка»	26	370	400
«Свой»	24	360	390
«Мясной ряд»	25	385	410

Марья Ивановна хочет купить 2 батона хлеба, 1 кг колбасы и 0,5 кг ветчины. В каком магазине стоимость такой покупки будет наименьшей, если в «Мясном ряду» у Марьи Ивановны скидка 10% на любые мясные изделия, а в «Покупай-ке» скидка 3% на весь ассортимент?

23. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса разогрева двигателя на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

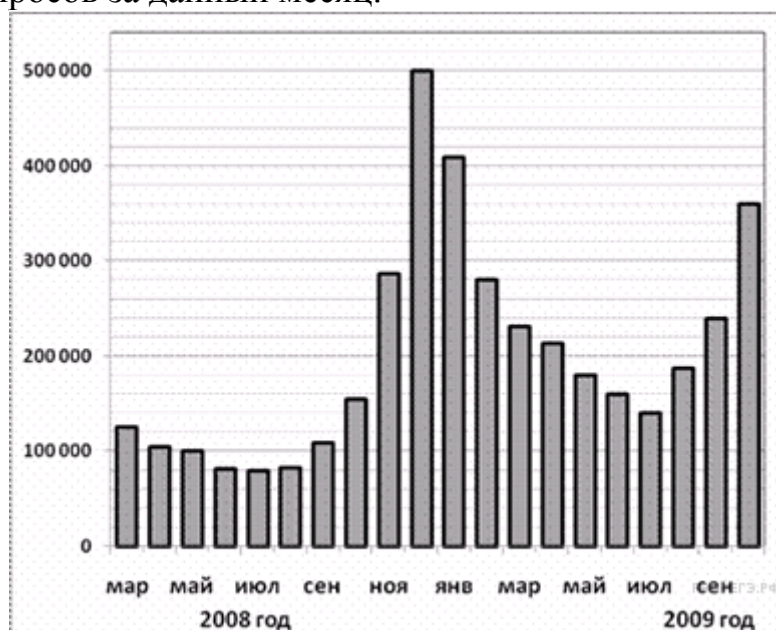
- А) 0–2 мин.
- Б) 2–4 мин.
- В) 4–6 мин.
- Г) 8–10 мин.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА

- 1) температура росла медленнее всего
- 2) температура падала
- 3) температура росла быстрее всего
- 4) температура не превышала 40 °С

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам.

24. На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц.



Пользуясь диаграммой, установите связь между промежутками времени и характером изменения количества запросов.

ПРОМЕЖУТКИ ВРЕМЕНИ

- А) Весна 2008 года
- Б) Лето 2008 года
- В) Осень 2008 года
- Г) Зима 2008-2009 года

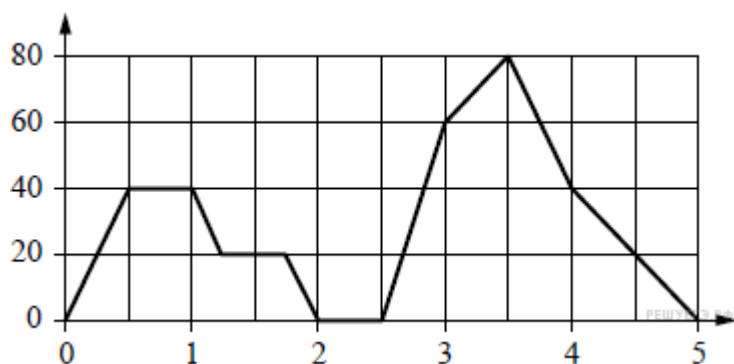
ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ЗАПРОСОВ

- 1) Количество запросов резко снижалось
- 2) Количество запросов заметно увеличивалось
- 3) Количество запросов практически не менялось
- 4) Количество запросов плавно снижалось

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам.

25. На графике изображена зависимость скорости движения легкового автомобиля на пути между двумя городами от времени. На вертикальной оси

отмечена скорость в км/ч, на горизонтальной — время в часах, прошедшее с начала движения автомобиля.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику движения автомобиля на этом интервале.

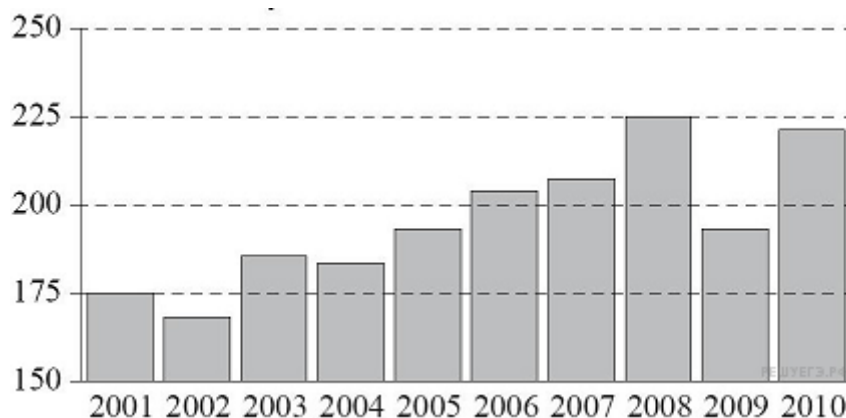
ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ

- А) второй час пути
- Б) третий час пути
- В) четвёртый час пути
- Г) пятый час пути

- 1) автомобиль не разгонялся и некоторое время ехал с постоянной скоростью
- 2) скорость автомобиля постоянно снижалась
- 3) автомобиль сделал остановку
- 4) скорость автомобиля достигла максимума за всё время движения

26. На диаграмме изображён среднегодовой объём добычи угля в России открытым способом в период с 2001 по 2010 годы. По горизонтали указывается год, по вертикали — объём добычи угля в миллионах тонн.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику добычи угля.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОБЫЧИ УГЛЯ

- А) 2002–2004
- Б) 2004–2006
- В) 2006–2008
- Г) 2008–2010

- 1) в течение периода объёмы добычи сначала уменьшались, а затем стали расти
- 2) объём добычи в первые два года почти не менялся, а затем резко вырос
- 3) объём добычи медленно рос в течение периода
- 4) объём добычи ежегодно составлял меньше 190 млн т

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

2.4. Формула простых процентов.

Это полезно знать.

Полезно понимать разные формы выражения одного и того же изменения величины, сформулированные без процентов и с помощью процентов.

Например, в сообщениях «зарботная плата бюджетникам с января повышена на 50%» и «зарботная плата бюджетникам с января повышена в 1,5 раза» говорится об одном и том же. Точно так же, увеличить в 2 раза - это значит увеличить на 100%, увеличить в 3 раза- значит на 200%, уменьшить в 2 раза- значит уменьшить на 50%.

В зависимости от способа начисления процентов (от выбора базы начисления) выделяют два основных вида процентов: простые и сложные.

Если величина A через равные промежутки времени t_1 имеет процентный прирост p только на первоначальное значение A_0 , то в момент времени $t_n = nt_1$ её значение A_n будет равно: $A_n = A_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$ – формула простых процентов.

Формулу простых процентов используют, например, при начислении штрафов. Также удобно применять начисление простых процентов тогда, когда по истечении каждого года вкладчик снимает со своего счета проценты, начисленные за этот год.

С приведенной формулой связаны четыре задачи: прямая задача и три обратные.

Пример 1. Занятия ребенка в музыкальной школе родители оплачивают в Сбербанке, внося ежемесячно 250 рублей. Оплата должна производиться до 15-го числа каждого месяца, после чего за каждый просроченный день начисляется пеня в размере 4% от суммы оплаты занятий за один месяц. Сколько денег придется заплатить родителям, если они просрочат оплату на неделю?

Решение. Так как по условию задачи $A_0 = 250$, $p = 4$, $n = 7$, то по формуле простых процентов находим искомую величину $A_7 = 250(1 + \frac{4 \cdot 7}{100}) = 320$ (руб.).

Ответ: 320 рублей.

Пример 2. Какую сумму положили в банк под простые проценты по ставке 22% годовых, если через пять лет вклад достиг 94 500 рублей?

Решение. По условию задачи $A_5 = 94\,500$, $p = 22$, $n = 5$, тогда, используя формулу простых процентов, получим уравнение: $94\,500 = A_0(1 + \frac{22 \cdot 5}{100})$.

Отсюда находим $A_0 = 94\,500 : 2,1 = 45\,000$ (руб.).

Ответ: 45 000 рублей.

Пример 3. Сколько лет лежал в банке вклад 70 000 рублей, если по ставке 19,2 % годовых простых процентов он достиг величины 150 640 рублей?

Решение. По условию задачи $A_0 = 70\,000$, $A_n = 150\,640$, $p = 19,2$. Если вклад пролежал n лет, то получаем уравнение: $150\,640 = 70\,000(1 + \frac{19,2n}{100})$, то есть

$$1 + \frac{19,2n}{100} = 2,152. \text{ Отсюда следует : } 19,2n = 214,2; n = 6.$$

Ответ: 6 лет.

Пример 4. Какую годовую ставку простых процентов выплачивает банк, если вклад 12 000 рублей через 3 года достиг величины 14 160 рублей?

Решение. По условию задачи $A_0 = 12\,000$, $A_3 = 14\,160$, $n = 3$. Получаем уравнение:

$$14\,160 = 12\,000(1 + \frac{3p}{100}). \text{ Отсюда } 1 + \frac{3p}{100} = 1,18; 3p = 18; p = 6(\%).$$

Ответ: 6%.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какую сумму положили в банк под простые проценты по ставке 27% годовых, если за 4 года вклад вырос на 167 400 рублей?

2. Известно, что банк начисляет простые проценты по ставке 25% годовых. Определите минимальное число лет, по истечении которых первоначальный вклад увеличится в 2 раза?

3. Определите годовую процентную ставку (банк начисляет простые проценты), если первоначальный вклад величиной 23 500 рублей за 6 лет увеличился на 38 070 рублей?

2.5. Формула сложных процентов.

Согласно статистике, почти каждая семья берет кредит на приобретение того или иного товара! В сегодняшние дни потребительские кредиты, кредитные карты, автокредиты, ипотека, вклады, банковские карты и другие финансовые услуги очень распространены и играют важную роль в экономике страны и каждой семьи.

Если величина A через равные промежутки времени t_1 будет иметь процентный прирост p и процент будет начисляться на измененную величину, то в момент времени $t_n = nt_1$ её значение A_n будет равно:

$A_n = A_0 \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$ – формула сложных процентов,

где знак «+» или «-» ставятся в соответствии с тем, к чему приводит «прирост» - к увеличению или уменьшению величины.

Приведем примеры прямой и обратных задач на применение формулы сложных процентов.

Пример 1. Один из видов срочных вкладов предусматривает начисление 9% прибыли через год хранения денег в банке. Если спустя этот срок счет не закрывается, то договор автоматически продлевается на тех же условиях (продлонгируется). Какая сумма будет на счету через 3 года при первоначальном вкладе 17 000 рублей и при той же процентной ставке? Результат (в рублях) округлите до десятых.

Решение. По условию задачи $A_0 = 17\,000$, $p = 9$, $n = 3$, тогда искомая величина равна

$$A_3 = 17\,000 \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right)^3 = 22\,015,493 \approx 22\,015,5 \text{ (руб.)}$$

Ответ: 22 015,5 рублей.

Пример 2 (открытый банк заданий, прототип 99569). Цена холодильника ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года он был продан за 15 842 рубля.

Решение. Пусть a – часть, на которую каждый год уменьшалась цена холодильника. Используя формулу сложных процентов, составим и решим уравнение:

$$20000(1 - a)^2 = 15842; (1 - a)^2 = \frac{15842}{20000}; 1 - a = 0,89; a = 0,11.$$

Следовательно, цена холодильника ежегодно уменьшалась на $0,11 \cdot 100 = 11(\%)$.

Ответ: 11%

Пример 3. Начальный капитал акционерного общества составляет 15 миллионов рублей. Ежегодно капитал увеличивается на 25%. Найдите минимальное количество лет, после которых капитал акционерного общества превысит 45 миллионов рублей.

Решение. Применяя формулу сложных процентов, получаем неравенство $15(1 + 0,25)^n = 45$; $1,25^n > 3$, где через n обозначено искомое количество лет. Так как $1,25^4 < 3$, а $1,25^5 > 3$ то $n = 5$.

Ответ: 5 лет.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В банк внесен вклад 64 000 рублей на 3 года. Определите ставку процента, если через 3 года на счету вкладчика оказалось 216 000 рублей.

2. Известно, что ставка банковского процента равна 25%. Определите через сколько лет начальный вклад 216 000 рублей возрастет до 421 875 рублей.

3. Цена некоторого товара снижается ежегодно на 10%. На сколько процентов по сравнению с первоначальной снизится стоимость товара через четыре года?

2.6. Обобщенная формула сложных процентов.

У многих наверняка возникнет вопрос, а к чему вообще все эти сложности, нельзя ли просто расписать каждый год в табличке, как это делают во многих учебниках, посчитать отдельно каждый год, а затем посчитать общую сумму вклада? Конечно, можно вообще забыть про сумму геометрической прогрессии и все считать с помощью классических табличек — так сделано в большинстве сборников для подготовки к ЕГЭ. Однако, во-первых, резко увеличивается объем вычислений, а во-вторых, как следствие, увеличивается вероятность допустить ошибку.

Если величина A за время t_1 имеет процентный прирост $p_1\%$, на следующем этапе за время $t_2 - t_1$ (не обязательно равное t_1) — $p_2\%$, далее за время $t_3 - t_2$ — $p_3\%$, и т.д., то в момент t_n её значение A_n будет равно:

$$A_n = A_0 \left(1 \mp \frac{p_1}{100}\right) \left(1 \mp \frac{p_2}{100}\right) \dots \left(1 \mp \frac{p_n}{100}\right)$$

где знак «+» или «-» в каждом множителе ставятся в соответствии с тем, к чему приводит «прирост» — к увеличению или уменьшению величины.

Пример 1. (Открытый банк заданий, прототип 99565). В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году в результате строительства новых домов число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году? Решение. Используя формулу сложных процентов, находим, что в 2010 году в квартале стало проживать

$$40000 \cdot (1 + 0,08) \cdot (1 + 0,09) = 40000 \cdot 1,08 \cdot 1,09 = 47088 \text{ человек.}$$

Ответ: 47 088 человек.

Пример 2. Зарплата служащего составляла 2000 денежных единиц (д.е.). Зарплату повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Изменилась ли первоначальная зарплата служащего, и если да, то на сколько денежных единицах она изменилась? Решение. Так как $20\% = 0,2$, то по обобщённой формуле сложных процентов находим новую зарплату служащего:

$$2000(1 + 0,2)(1 - 0,2) = 1920.$$

Следовательно, его зарплата уменьшилась на $2000 - 1920 = 80$ (д.е.). Замечание. Поскольку $(1 + 0,2)(1 - 0,2) = 0,96$, то сразу видно, что зарплата уменьшилась на 4%, что в денежном выражении составило 80 д.е. Ответ: уменьшилась на 80 д.е.

Пример 3. Зарплата служащего составляла 2000 денежных единиц (д.е.) Зарплату понизили на 20%, а вскоре повысили на 20%. Сколько денег стал получать служащий? Решение. Так как $20\% = 0,2$, то используя формулу обобщённых сложных процентов, находим новую зарплату служащего:

$$2000(1 - 0,2)(1 + 0,2) = 1920. \text{ Ответ: } 1920 \text{ д.е.}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1) В течение января цена на яблоки выросла на 20%, а в течение февраля — на 30%. На сколько процентов поднялась цена за 2 месяца?

2) Изобретение Иванова даёт экономию 40%, Петрова — 30%, а Сидорова — 20%. Сколько процентов составит общая экономия? (Применение одного изобретения не влияет на эффективность других.)

3) Пётр открыл вклад «Сюрприз» на три года. Договор предусматривает следующую схему начисления процентов: за первый год — 8%, в каждом следующем году ставка повышается на 4 процентных пункта. Определите, на сколько процентов вырастет вклад Петра за три года.

4) По оценкам экспертов цена новой модели сотового телефона снижается за первый год на 15%, за второй — на 10%, за третий — на 5%. Сколько будет стоить через три года сотовый телефон, начальная цена которого равнялась 250 евро?

2.7. Экономическая задача с дифференцированной схемой выплат.

Задача. 15 мая бизнесмен запланировал взять кредит в банке в размере 12 млн. рублей на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом прошлого месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше, чем долг на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько процентов больше по отношению к взятому кредиту придется заплатить бизнесмену?

Здесь речь пойдет о дифференцированной схеме выплат, когда платежи не равны. Каждый раз заемщик выплачивает часть долга (в нашем случае $\frac{1}{19}$), и, кроме этого, все проценты по данному кредиту. Поскольку сначала сумма кредита большая, то и проценты составляют большую сумму, но потом сумма кредита с каждым платежом уменьшается, а значит, и сумма процентов все время становится меньше, так что первый платеж самый большой, а последний — самый маленький.

Итак, сначала, перед первым платежом, мы (встанем на место бизнесмена) должны банку $A = 12$ млн рублей. Выплачиваем в первый платеж одну часть кредита $\frac{A}{19}$ и проценты $0,02A$; и ко второму платежу мы уже должны $\frac{18}{19}A$. Банк начисляет проценты. Во второй платеж снова выплачиваем одну часть кредита $\frac{A}{19}$ и проценты, которые банк начисляет $0,02 \cdot \frac{18}{19}A$. К третьему платежу мы должны уже $\frac{17A}{19}$, и именно на эту сумму банк начислит проценты, и так далее. Таким образом, через девятнадцать месяцев мы выплатим всю сумму кредита (по одной части каждый месяц), и проценты, которые будут составлять:

$$W = 0,02A + 0,02 \cdot \frac{18,4}{19} + 0,02 \cdot \frac{17,4}{19} + \dots + 0,02 \cdot \frac{4}{19}$$

Вынесем за скобки A и сумму процентов $r=0,02$.

$$W = 0,02A \left(1 + \frac{18}{19} + \frac{17}{19} + \dots + \frac{1}{19} \right)$$

В скобках получили сумму арифметической прогрессии, определим ее:

$$W = 0,02A \cdot S_n, \text{ где } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Можно вычислять как сумму убывающей прогрессии, так и сумму возрастающей, это кому как удобнее. В первом случае $a_1 = 1, d = -\frac{1}{19}, n = 19$, а во втором случае $a_1 = \frac{1}{19}, d = \frac{1}{19}, n = 19$. Так как платежи убывают, то давайте все-таки посчитаем сумму убывающей прогрессии:

$$S_{19} = \frac{2 - 18 \cdot \frac{1}{19}}{2} \cdot 19 = 10$$

Таким образом, сумма процентов равна:

$$W = 0,02 \cdot A \cdot S_n = 0,02 \cdot 12 \cdot 10 = 2,4$$

Итак, проценты составят 2,4 млн рублей. Тогда всего бизнесмен выплатит банку $P = 12 + 2,4 = 14,4$ млн рублей. Это составляет

$$Q = \frac{P}{A} \cdot 100 - 100 = \frac{14,4}{12} \cdot 100 = 120$$

Бизнесмен заплатит 120 процентов суммы, это на 20% больше того, что он взял в долг. Поэтому

Ответ: на 20%.

2.8. Определение процента банка.

Задача 1. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100000 рублей. Условия его возврата таковы:– каждый январь долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года;– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга. Найдите число a , если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 55000 руб., а во второй 69000 рублей.

Запишем, что происходило с кредитом, поэтапно:

В июле взяли в кредит 100 000 рублей;

В январе сумма кредита возросла, потому что банк начислил проценты:

$$100000 \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right)$$

С февраля по июнь выплатили 55 000 рублей, таким образом, долг уменьшился: $100000 \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right) - 55000$

В январе банк снова начислил проценты на кредит:

$$\left(100000 \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right) - 55000 \right) \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right).$$

А после этого последовал второй платеж, и заемщик расплатился с банком полностью: $\left(100000 \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right) - 55000 \right) \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right) - 69000 = 0$

Раскрыв скобки, получаем следующее квадратное уравнение:

$$(1000\alpha + 45000)\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)69000 = 0$$

$$100\alpha + 10\alpha^2 + 45000 + 450\alpha - 69000 = 0$$

$$\alpha^2 + 145\alpha - 2400 = 0$$

$$\alpha_1 = -160, \alpha_2 = 15$$

отрицательный корень посторонний – не подходит по условию.

Ответ: 15

Задача 2. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн. рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

каждый январь долг возрастает по сравнению с концом предыдущего года;

с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найти r , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн. рублей, а наименьший – не менее 0,5 млн. рублей.

Будем рассуждать так. Так как нужно, чтобы долг уменьшался на одну и ту же сумму регулярно, то это означает следующее: с февраля по июнь надо выплатить эту часть долга, но, более того, надо выплатить и все проценты, начисленные банком! То есть платежи не могут быть равными в этом случае. Самый большой долг у нас в самом начале, и самые большие проценты соответственно. То есть первый платеж будет самым большим, а потом платежи будут меньше и меньше, и самый последний – будет самым маленьким. Если надо выплачивать 15 раз часть долга, то это $\frac{6000000}{15} = 400000$. К этой сумме

еще добавляются все проценты, начисленные банком – и в этом случае долг меньше каждый год на одну и ту же сумму – 400 000. Так как по условию наименьший годовой платеж равен 500 000, а мы договорились, что он последний, то процент, начисляемый банком, может быть определен: $500000 \cdot \frac{100}{400000} = 1 + \frac{r}{100} 1,25$, то есть равен $r=15\%$. Можно убедиться, что в этом случае наибольший платеж составит как раз 1,9 млн.

Ответ: 25

Задача 3. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы: – 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга – 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Задача похожа на предыдущую. Как только мы видим фразу: «долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на» – мы понимаем, что здесь речь идет не о равных платежах, а каждый раз придется выплачивать все проценты, начисленные банком, да еще и часть долга. Предположим, что

взято X рублей. Тогда банк начислит проценты на эту сумму, и 1-го числа мы будем уже должны банку $X + X \cdot \frac{r}{100}$ рублей.

Нам надо в первый платеж отдать все проценты – то есть $X \cdot \frac{r}{100}$ рублей, да еще и $\frac{1}{39}$ часть долга тоже, а так как платить нам 39 месяцев, то надо отдать часть долга, или $\frac{X}{39}$. Весь первый платеж тогда будет $X + \frac{r}{100} + \frac{X}{39}$.

После того, как мы внесли первый платеж, наш долг уменьшается на $\frac{1}{39}$ часть, и остается $\frac{38X}{93}$.

Во второй платеж придется заплатить проценты с оставшегося долга и еще $\frac{1}{39}$

И так каждый месяц: проценты и еще одна часть долга. Тогда за 39 месяцев мы выплатим все: и весь долг по $\frac{1}{39}$ части, и все проценты. Процент будет:

$$X \cdot \frac{r}{100} + \frac{38X}{39} \cdot \frac{r}{100} + \frac{37X}{39} \cdot \frac{r}{100} + \dots$$

Вынесем общий множитель а скобку

$$\frac{X}{39} \cdot \frac{r}{100} (39 + 38 + \dots + 1) = \frac{X}{39} \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{2 \cdot 39 - 38 \cdot 1}{2} \cdot 39$$

$$= 0,2Xr, \text{ что по условию задаи равно } 0,2X. \text{ Получим уравнение}$$

$$0,2r = 0,2, \quad r = 1\%$$

Ответ: 1%

Задача 4. 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $r\%$), затем Олег делает очередную выплату. Если он будет платить каждый год по 328050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587250 рублей, то за два года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

Здесь можно воспользоваться известной формулой: $X \cdot R^n = A \cdot \frac{R^n - 1}{R - 1}$

$$R = 1 + \frac{r}{100}$$

В этих формулах R – процент, начисляемый банком за пользование его деньгами, n – срок кредита (лет или месяцев) A – платеж (ежегодный или ежемесячный, но всегда один и тот же – равные платежи), X – сумма, которую мы одалживаем у банка.

$$\text{Если берем на 4 года, то: } X \cdot R^4 = 328050 \cdot \frac{R^4 - 1}{R - 1}$$

$$\text{Если берем на 2 года, то: } X \cdot R^2 = 587250 \cdot \frac{R^2 - 1}{R - 1}$$

$$R = 1,125, \quad r = 12,5\%$$

Ответ: 12,5%

2.9. Кредиты. Разные задачи.

Задача 1. Вкладчик внёс некоторую сумму в сбербанк под определённый процент годовых. Через год он взял половину получившейся суммы и переложил её в коммерческий банк, процент годовых которого в 32 раза выше, чем в сбербанке. Ещё через год сумма вкладчика в коммерческом банке превысила вложенную туда первоначальную сумму на 4%. Каков процент годовых в сбербанке?

Пусть вкладчик принес в банк A рублей. Тогда через год на его счету будет та же сумма, но с процентами. Если сбербанк начисляет $n\%$, то на счету вкладчика будет $A + \frac{A \cdot n}{100} = A(1 + \frac{n}{100})$. Вкладчик решил забрать половину суммы: $\frac{A}{2}(1 + \frac{n}{100})$. Её он положил в коммерческий банк, который начисляет $32n\%$ годовых. Через год на его счету была та же сумма, но с процентами:

$$\frac{A}{2}\left(1 + \frac{n}{100}\right) + \frac{nA(1 + \frac{n}{200})}{200} = \frac{A(1 + \frac{n}{100})}{2} \cdot \left(1 + \frac{32n}{100}\right)$$

Это больше того, что вкладчик положил на свой счет, на 4% :

$$\frac{A\left(1 + \frac{n}{100}\right)}{2} \left(1 + \frac{32n}{100}\right) = \frac{A}{2} \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot 1,04$$

Решение оказалось не таким сложным, однако оно может быть совсем простым! Если подумать, то увеличение суммы, положенной вкладчиком в коммерческий банк, на 4% , говорит о том, что процент, начисляемый этим банком, как раз равен 4% ! А значит, процент сбербанка равен $0,125\%$.

Ответ: $0,125$

Задача 2: В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составляла $x\%$ годовых, тогда как в январе 2001 года – $y\%$ годовых, причем известно, что $x + y = 30$. В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x , при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

Запишем, что происходило со вкладом. Пусть вкладчик принес D рублей (а может, не рублей) в банк в январе 2000 и положил под $x\%$ годовых. По прошествии года на его счету будет сумма с процентами $P_1: D + \frac{D}{100} \cdot x$

Вкладчик решил снять пятую часть средств, тогда останутся в банке

$$D\left(1 + \frac{x}{100}\right) - \frac{1}{5}D$$

Эти средства лежат на его счету еще год, а банк начисляет ему уже $y\%$ годовых, то есть через год на его счету сумма с процентами P_2 :

$$P_2 = D\left(1 + \frac{x}{100}\right) - \frac{1}{5}D \cdot \left(1 + \frac{y}{100}\right)$$

$$x + y = 30, x = 30 - y$$

$$P_2 = \frac{x}{200} + \frac{x^2}{2000}, \quad P'_2 = \frac{1}{200} + \frac{2x}{200}, \quad x=25$$

То есть наибольшее количество денег окажется на счету, если процентная ставка во второй год хранения денег в банке будет составлять 25 %.

Ответ: 25%

Задача 3. В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некоторой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена барреля сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

Опять обозначим исходную сумму, которой располагает администрация, А рублей. Эта сумма провела в банке 2 месяца, то есть на нее дважды успели начислить проценты, первый раз, 1 октября: $A \cdot 0,26$

Второй раз, 1 ноября: $A \cdot 1,26 \cdot 1,26 = 1,5876A$

Пусть баррель нефти стоил Р рублей. Раз нефть дешевела раз в месяц на 10 %, значит, на 1 октября баррель нефти стоил 0,9Р, а на 1 ноября – $0,9^2 P$

Если бы администрация не стала бы ждать, а сразу купила нефть, то количество этой нефти было бы $\frac{A}{P}$ баррелей.

В новых условиях, после того, как нефть подешевела, а деньги – «подорожали», администрация купит $\frac{1,5876A}{0,81P} = 1,96 \frac{A}{P}$ баррелей нефти, то есть почти вдвое больше.

Составим пропорцию: $\frac{A}{P}$ баррелей – это 100%, $1,96 \frac{A}{P}$ баррелей – это х процентов. Тогда понятно, что администрация сможет купить на 96 % больше нефти.

Ответ: 96 %.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Цена товара а руб. была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара.

2. Число а составляет 80% числа б, а число с составляет 140% числа б. Найдите числа а, б и с, если известно, что с больше а на 72.

3. Цена первого товара поднялась на 40%, а потом еще на 25%. Цена второго товара поднялась на 30%, после чего оказалось, что цена первого товара на 40 процентов выше второго. На сколько процентов первоначальная цена первого товара была больше первоначальной цены второго товара?

4. Популярность продукта А за 2002 год выросла на 10%, в следующем году она снизилась на 20%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью

продукта В. Популярность продукта В в 2002 году выросла на 20% , затем на протяжении одного года не изменялась, а за 2004 год снизилась на 10% . Как изменилась популярность продукта А за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{3}{4}$ от популярности продукта В.

5. В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи - со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.

6. В банк положен вклад под определенный процент годовых. Через год вкладчик снял $\frac{1}{4}$ получившейся суммы. Банк увеличил процент годовых в два раза по сравнению с предыдущим годом, и еще через год получившаяся сумма превысила первоначальный вклад на 164%. Каков новый процент годовых у банка?

7. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{3}{4}$ от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

8. Банк начисляет на вклады p процентов ($p < 25\%$) один раз в год. Вкладчик положил некоторую сумму на счет в банк. Через год вкладчик добавил к получившейся сумме столько, что сумма вклада стала в два раза больше первоначальной. Еще через два года его вклад увеличился до 43 тыс. 200 руб. Сколько процентов начисляет банк по вкладам в год, если за первый год процентные деньги составляли 3 тыс. руб.

9. Антикварный магазин продал картину со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли магазин предполагал получить первоначально?

10. Предприниматель вложил $\frac{3}{7}$ своего капитала в покупку товара А, 70% оставшегося капитала в покупку товара Б, а все средства, оставшиеся после приобретения товаров А и Б, вложил в покупку товара В. При реализации товара А предприниматель потерпел убыток в 20%, а при реализации товара Б получил прибыль в размере 10%. Какой процент прибыли получил предприниматель от реализации товара В, если общая прибыль от реализации всех трех товаров составила 1%.

11. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

12. В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке 50% к текущей сумме на счете, во втором – 75% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег поло-

жил в первый банк, а остальные деньги – во второй банк с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах утроилось. Какую часть денег вкладчик положил в первый банк?

13. Известно, что вклад, находящийся в банке, с начала года возрастает к концу года на определённый процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{5}{6}$ некоторого количества денег положили в первый банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 у.е., а к концу второго года – 749 у.е. Было подсчитано, что если бы первоначально $\frac{5}{6}$ исходного количества денег положили во второй банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 у.е. В предложении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

14. Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае, если на одну акцию выпадает обе скидки, то применяется большая из них. Определите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 1000 руб.

15. Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 25% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 16% с тем, чтобы покрыть только затраты на покупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла цена транспортировки товара?

16. Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако 3 человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тысячи рублей больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определите выделенную бригаде сумму денег, если 5%-ный сбор за её банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тысяч рублей.

17. Банк планирует вложить на год 40% имеющихся у него средств в проект X, а остальные 60% - в проект Y. В зависимости от обстоятельств проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24 процентов годовых, а проект Y – от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить проценты по заранее установленной ставке. Определите наименьший и наибольший уровень процентной ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

18. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $\frac{11}{9}\%$, и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения

первоначальная сумма вклада увеличилась на $\{104\} \{1/6\}\%$. Определите срок хранения вклада.

2.10. Задачи на оптимизацию.

Не так давно в вариантах ЕГЭ появились текстовые задачи, в которых необходимо найти наименьшее или наибольшее значение некоторой величины. При решении большинства этих задач применяется производная. Для их решения нужно:

1. Составить функцию, которую необходимо оптимизировать.
2. Найти ее производную.
3. Приравнять к нулю, чтобы выявить критические точки. В них функция принимает наименьшее или наибольшее значения.
4. Подставив найденные значения в функцию, получим ответ задачи.

Рассмотрим примеры решения некоторых из них.

Задача 1. В двух шахтах города Норильска добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на металлургический завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Составим таблицу

		Количество рабочих	Добыча за 1 час
1 шахта	никель	x	3x
	алюминий	100-x	1·(100-x)
2 шахта	никель	y	1·y
	алюминий	300-y	3·(300-y)

Так как в промышленности для сплава нужно в 2 раза больше алюминия, чем никеля, и на обеих шахтах работают по 5 часов в день, то $5(1 \cdot (100-x) + 3 \cdot (300-y)) = 5(2(3x+1y))$. После преобразований получим: $y = 200 - 1,4x$. Функция выпуска сплава $m(x,y) = 5(3x + (100-x) + y + 3(300-y))$. Подставим y, тогда $m(x) = 3000 + 24x$. Поскольку $x \leq 100$, то максимальное значение $m(x) = 5400$ достигается при $x = 100$

Ответ: 5400 кг сплава будет ежедневно выпускать промышленность.

Задача 2. В поселке «Черная Речка» фермер выращивает картофель и свеклу на двух полях, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать обе культуры, и поля можно делить между ними в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц /га, а на

втором – 200ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет - 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу - по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение: Пусть x га на первом поле отводится под свеклу, а $(10 - x)$ га отводится под картофель. С первого поля собирают $300(10 - x)$ ц картофеля и $200x$ ц свеклы. Пусть y га на втором поле отводится под свеклу, а $(10 - y)$ га отводится под картофель. Со второго поля собирают $200(10 - y)$ ц картофеля и $300y$ ц свеклы. Прибыль с первого поля $(30\,000\,000 - 3\,000\,000x + 2\,600\,000x)$ руб., а прибыль со второго поля $(20\,000\,000 - 2\,000\,000y + 3\,900\,000y)$ руб. Функция прибыли с двух полей $S(x; y) = 1\,900\,000y - 400\,000x + 50\,000\,000$. Наибольшее значение функции принимает при $x = 0$, а $y = 10$, тогда прибыль составит 69 000 000 руб.

Ответ: 69 000 000 рублей наибольший доход фермера.

Задачи для самостоятельного решения

1. В поселке «Черная Речка» фермер выращивает картофель и свеклу на двух полях, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать обе культуры, и поля можно делить между ними в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц /га, а на втором – 200ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет - 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу - по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

2. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель? Ответ:104500 рублей.

3. В январе 2014 года ставка по депозитам в банке «ВТБ» составляла x % годовых, тогда как в январе 2015 года — y % годовых, причем известно, что $x+y=30\%$. В январе 2014 года вкладчик открыл счет в банке «ВТБ», положив на него некоторую сумму. В январе 2015 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2016 года станет максимально возможной. Ответ:25%.

4. 2. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промыш-

ленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металла так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод? Ответ: 90 кг

5. В Хабаровске и в Благовещенске работают заводы по изготовлению кирпичей. В 2015 году на заводе в Хабаровске установили современное оборудование, поэтому рабочие этого завода суммарно трудятся t^2 часов в неделю и выпускают при этом $2t$ единиц продукции. Рабочие в Благовещенске трудятся суммарно t^2 часов, но выпускают t единиц продукции. Ставка заработной платы рабочего на обоих заводах составляет 500 рублей в час. А общая плата рабочим обоих заводов составляет 30250000 рублей в неделю. Какое максимальное количество единиц продукции в неделю могут выпускать оба завода? Ответ: 550

6. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала. Ответ: 320 рублей

7. Строительство нового завода стоит 100 млн. рублей. Затраты на производство тысячи ед. продукции в этом цехе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн. руб. в год. Если продукцию продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн. руб.) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма начнет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство цеха окупится не более, чем за 4 года? Ответ: 9.

3. Сюжетные задачи.

Чтобы найти, сколько процентов составляет число A от числа B , нужно частное $\frac{A}{B}$ умножить на 100%.

Чтобы найти, на сколько процентов число A больше (меньше) числа B , нужно найти, сколько процентов составляет число A от числа B , а затем из этого количества процентов отнять 100% (из 100% отнять найденное количество процентов).

Заметим, что складывать проценты можно только в том случае, если они взяты от одной и той же величины!

Задача 1. В 2015 году население составляло 115% по сравнению с предыдущим годом, а в 2016 – 110% по сравнению с предыдущим. Сколько процентов составило население в 2016 году по сравнению с 2014 годом?

Решение:

Так как в 2015 году задан процент относительно 2014, а в 2016 – относительно 2015, то нельзя сказать, что в 2016 году население составило $115\% + 110\%$.

Поэтому, пусть x – количество людей в 2014 году. Тогда в 2015 году $1,15x$ человек, а в 2016 году $1,1 \cdot (1,15x) = 1,265x$. Значит население в 2016 составило 126,5% по сравнению с 2014 годом.

Задача 2. В государстве π в 2012 году ЕГЭ по математике не сдали 20000 выпускников. В 2013 году число не сдавших уменьшилось на 5%, а в 2014 году – увеличилось на 17% по сравнению с 2013 годом. Сколько выпускников не сдали ЕГЭ по математике в 2014 году в государстве π ?

Решение:

В 2013 году число не сдавших составило $100\% - 5\% = 95\%$ от числа не сдавших в 2012 году, тогда в 2013 году не сдали ЕГЭ по математике $20000 \cdot 95/100 = 19000$ выпускников. В 2014 году число не сдавших составило $100\% + 17\% = 117\%$ от числа не сдавших в 2013 году, тогда в 2014 не сдали ЕГЭ по математике $19000 \cdot 117/100 = 22230$ выпускника.

Ответ: 22230.

Задача 3. Три шоколадных батончика дороже шоколадки на 11%. На сколько процентов четыре батончика дороже шоколадки?

Решение:

Пусть b – цена батончика, а s – цена шоколадки, тогда $11/100 \cdot s = 3b$, выразим $b = 37/100s$, значит, $4b = 148/100s = s(1 + 48/100)$, то есть 4 батончика дороже шоколадки на 48%. Ответ: 48

Задачи для самостоятельного решения

1. Игнат хранит деньги дома под подушкой. У него есть 100 рублей. Известно, что пакет молока 1 числа стоил 65 рублей. В течение последующих 10 дней молоко дорожало каждый день на 10% по сравнению с предыдущим днём. Какого числа Игнату впервые не хватило денег на пакет молока? (Ответ: 6 числа).

2. Антон, Максим, Игорь, Тимур и Костя купили 1000 лотерейных билетов на общую сумму 30000 рублей. На эту покупку Антон и Игорь дали в сумме 8100 рублей, Максим дал 15% общей суммы, Тимур дал 0,3 общей суммы, а оставшуюся часть общей суммы внёс Костя. Ребята договорились в случае выигрыша поделить деньги пропорционально внесённому в общую сумму вкладу. В итоге они выиграли в сумме 2000000 рублей. Сколько рублей должен получить Костя? (Ответ: 560000)

3. Кофта во вторник подорожала на 25%. На сколько процентов она должна была подешеветь в среду (относительно цены вторника), чтобы её цена стала первоначальной (как до повышения во вторник). (Ответ 20)

4. В среду молоко подорожало на x процентов, а в четверг подешевело на x процентов. В результате молоко стало стоить на 1% дешевле, чем стоило во вторник (до подорожания). На сколько процентов дешевле стало бы молоко по сравнению со вторником, если бы оно сначала в среду подешевело на x процентов, а в четверг подорожало на x процентов? (Ответ: 1)

5. Шариковая ручка стоит 7 рублей. При покупке более 50 ручек на всю покупку начинает действовать скидка 20%. Сколько рублей нужно заплатить при покупке 120 ручек? Ответ: 672.

6. Розничная цена учебника 364 рубля, она на 18% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 7000 рублей? Ответ: 23.

7. Железнодорожный билет для взрослого стоит 820 рублей. Стоимость билета школьника составляет 60% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 25 школьников и 4 взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу? Ответ: 15580.

4. Практические советы:

Решите несколько задач на проценты. Для закрепления, так сказать. В этих задачках мы постарались собрать все главные трудности, которые поджидают решающих. Те грабли, на которые чаще всего наступают. Вот они:

1. Элементарная логика при анализе простых задачек.
2. Правильный выбор величины, от которой нужно считать проценты. Сколько народу споткнулось на этом! А ведь есть очень простое правило...
3. Проценты от процентов. Мелочь, а смущает здорово...
4. И ещё одни вилы. Связь процентов с дробями и частями. Перевод их друг в друга.
5. В задачах на проценты – переходим от процентов к конкретным величинам. Или, если надо – от конкретных величин к процентам. Внимательно читаем задачу!
6. Очень тщательно изучаем, от чего нужно считать проценты. Если об этом не сказано прямым текстом, то обязательно подразумевается. При последовательном изменении величины, проценты подразумеваются от последнего значения. Внимательно читаем задачу!
7. Закончив решать задачу, читаем её ещё раз. Вполне возможно, вы нашли промежуточный ответ, а не окончательный. Внимательно читаем задачу!

Справочный материал

Это нужно запомнить!

1. 1% от числа это 0,01
2. За 100% принимается та величина, с которой сравнивают.
3. Если число A увеличили на $p\%$, то получим: $A(1 + \frac{p}{100})$;
4. Если число A уменьшили на $p\%$, то получим: $A(1 - \frac{p}{100})$
5. Если величину A увеличили на $p\%$ 2 раза, то получим: $A(1 + \frac{p}{100})^2$;
6. Если величину A увеличили на $p\%$ n количество раз, то получим:
$$A(1 + \frac{p}{100})^n$$
;
7. Если величину A сначала увеличили на $p\%$, а затем уменьшили на $k\%$, получим: $A(1 + \frac{p}{100}) \cdot (1 - \frac{k}{100})$;
8. Чтобы перевести проценты в десятичную дробь, необходимо количество процентов разделить на 100.

5. Заключение.

Задачи с экономическим содержанием являются практическими задачами. А их решение, бесспорно, способствует более качественному усвоению содержания курса математики средней школы, позволяет осуществлять перенос полученных знаний и умений в экономику, что в свою очередь, активизирует интерес к задачам прикладного характера и изучению математики в целом. Такие задачи позволяют наиболее полно реализовывать прикладную направленность в обучении и способствуют более качественному усвоению самого учебного материала и формированию умения решать задачи данного типа.

6. Литература.

1. Методика работы с сюжетными задачами: Учебно-методическое пособие / Н.А. Малахова, В.В. Орлов, В.П. Радченко, В.Е. Ярмолюк; под ред. к.п.н., доц. Радченко, к.п.н. В.В. Орлова. С. Петербург: «Образование», 1992
2. А.А. Прокофьев, А.г. Корянов. «Социально-экономические задачи»
3. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций, СПб.: Союз, 1999.
4. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова «Подготовка к ЕГЭ -2018. Профильный уровень»
5. Интернет-ресурсы:
<http://egemaximum.ru/zadanie-19-t-r-116-a-larina>
http://egetrener.ru/view_vse.php